# **Apuntes – Módulo 3**

## **Curso: Modeling and Simulation of Natural Processes**

**Universidad de Ginebra - Prof. Bastien Chopard et al.** **Semana 3 – Sistemas Dinámicos e Integración Numérica**

### **1. Introducción general a los sistemas dinámicos**

Se dice una frase muy interesante: Este es el punto de partida. Si algo cambia en el tiempo, ¡es un sistema dinámico!

* **Definición:** Cualquier sistema que varía a lo largo del tiempo. Su estado se describe con una variable s(t) (que puede ser un vector, no solo un escalar).
* **Clasificaciones clave:**
  + **Sistemas Dinámicos Discretos:** Evolucionan en "pasos" de tiempo finitos (Δt). Se describen con relaciones de recurrencia. Hay que pensarlo como s(t + Δt) = f(s(t)).
  + **Sistemas Dinámicos Continuos:** Evolucionan de forma suave, se describen con ecuaciones diferenciales. Aquí la clave es la derivada temporal:  
     **ds/dt = f(s(t)).**
* **Generalidad:**
  + Derivadas de orden superior
  + Dependencia explícita del tiempo

### **2. Ejemplos de sistemas dinámicos**

Estos ejemplos son clave para aterrizar los conceptos.

#### **a) El Paseo aleatorio (Sistema Discreto)**

* **Objetivo:** Modelar el movimiento de partículas, o incluso personas, donde la dirección y velocidad del siguiente paso es aleatoria.
* **Descripción:** Partícula en 2D con posición (x, y). En cada Δt, la velocidad (Vx, Vy) se elige aleatoriamente de un conjunto predefinido (Norte, Sur, Este, Oeste, o reposo).
* **Fórmula:** x(t + Δt) = x(t) + Δt \* Vx(t), y lo mismo para y.
* **Consideración:** Para pocas partículas, el comportamiento es muy discreto. Pero a medida que el número de partículas aumenta (ej., 100,000), el comportamiento colectivo empieza a converger a la solución continua. Esto es súper interesante, muestra cómo lo "aleatorio" a gran escala puede ser predecible.

#### **b) Crecimiento de una población (Sistema Continuo)**

* **Modelo Básico:** dP/dt = B - D (nacimientos menos muertes).
* **Modelo Logístico:** Un modelo más realista que incluye una "capacidad objetivo" o límite C para la población. La ecuación es dP/dt = rP(1 - P/C), donde r es la tasa de crecimiento.
* **Puntos Fijos:** Son los valores de población donde dP/dt = 0, es decir, la población no cambia.
  + **P = 0:** Población extinguida (punto fijo inestable, si te desvías un poco, crece o decrece).
  + **P = C:** Población en equilibrio con la capacidad del entorno (punto fijo estable, si te desvías un poco, la población tiende a regresar a C).
* **Observación:** Si Δt se hace más pequeño, la aproximación numérica se acerca más a la solución analítica.

#### **c) Ecuaciones de Equilibrio I y II (Generalizaciones)**

* **Ecuaciones de Equilibrio I:** Generalizan el crecimiento poblacional. Se centran en la variación de una cantidad en el sistema dinámico como tasa de creación - tasa de destrucción.
  + **Ejemplo Lotka-Volterra (Antílopes y Guepardos):** Un sistema acoplado donde la población de una especie influye en la otra, generando evoluciones periódicas. Interesante ver cómo un sistema simple puede llevar a ciclos complejos.
* **Ecuaciones de Equilibrio II (Dependencia Espacial):** Aquí la cosa se complica un poco porque se introduce el espacio en el problema.
  + **Volumen de Control: C**oncepto clave. Ahora balanceamos las cantidades  
     *dentro* de un volumen y consideramos los *flujos* a través de su superficie.
  + **Ecuación de Conservación del Momento (Navier-Stokes):** Esta es la famosa para fluidos. Describe cómo cambia la velocidad de un fluido. Es análoga a una ecuación de difusión de momento, con la viscosidad como coeficiente de difusión. Complicadísima de resolver!
  + **Ecuación de Difusión 1D:** Punto de partida para PDE. dC/dt = D \* Laplaciano(C). Necesita condiciones iniciales y condiciones de contorno (límites físicos del dominio x0 a xf).
  + **Discretización:** ¡Tenemos que discretizar el tiempo Y el espacio! El espacio se divide en puntos discretos.

### **3. Integración numérica de ecuaciones diferenciales**

Aquí es donde las cosas se ponen prácticas. Si no hay solución analítica, hay que aproximar.

#### **a) Integración de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs)**

* **Esquema de Euler Explícito:** El más simple.  
   s(t + Δt) = s(t) + Δt \* f(s(t), t).
  + **Observación:** Es muy fácil de implementar en el pc
  + **Limitación:** Puede volverse inestable si Δt es demasiado grande (la solución numérica puede divergir salvajemente de la real, incluso oscilando).

#### **b) El Esquema de Euler Implícito**

* **Objetivo:** Una forma alternativa para construir un esquema numérico, buscando mayor estabilidad.
* **Diferencia clave:** En el esquema implícito, la s(t + Δt) en el lado derecho de la ecuación. Esto significa que necesitamos resolver una ecuación (o un sistema de ecuaciones) en cada paso de tiempo para encontrar s(t + Δt).
* **Ventaja:** Es incondicionalmente estable. Se puede usar Δt más grandes sin que la solución "explote"
* **Desventaja:** Más complicado conceptualmente y computacionalmente más lento en cada paso (porque hay que resolver un sistema).

#### **c) Error de la aproximación**

* **Concepto de error:** La distancia entre la solución analítica (la "verdadera") y nuestra solución numérica. Depende principalmente de Δt.
* **Definición formal:** Se calcula como la raíz cuadrada de la media de las distancias cuadradas entre la solución analítica y la numérica en cada punto.
* **Orden de un esquema numérico:** Un esquema es de orden k si su error es proporcional a (Δt)^k.
  + Para el esquema explícito, el error es proporcional a  
     Δt (esquema de orden 1). Esto significa que si reduces  
     Δt a la mitad, el error también se reduce a la mitad.
* **Convergencia:** A medida que Δt tiende a cero, el error disminuye, y la solución numérica se acerca a la analítica.

#### **d) Integración Numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs)**

* **El reto:** Ahora tenemos que discretizar el tiempo y el espacio.
* **Ecuación de difusión 1D:** Un ejemplo clásico para empezar. dC(t)/dt = D/Δx^2 \* A \* C(t).
  + **Discretización espacial:** El Laplaciano se aproxima con diferencias finitas (por ejemplo, (Ci+1 - 2Ci + Ci-1) / Δx^2). Esto convierte la EDP en un sistema de EDOs.
  + **Discretización temporal:** Una vez discretizado el espacio, aplicamos los mismos esquemas de tiempo que para las EDOs (Euler explícito o implícito).
    - Explícito: C(ti+1) = C(ti) + Δt \* D/Δx^2 \* A \* C(ti).
    - Implícito: C(ti+1) - C(ti) = Δt \* D/Δx^2 \* A \* C(ti+1). Requiere resolver un sistema lineal.
* **Consideración importante:** Para EDPs complejas (como Navier-Stokes), la inversión de la matriz en los esquemas implícitos puede ser muy, muy complicada y computacionalmente costosa.

**Consideraciones generales del módulo:**

Este módulo ha sido denso pero súper importante. La idea central es que, aunque los sistemas dinámicos son complejos, con la discretización y los métodos numéricos se puede aproximar sus soluciones. Entender la diferencia entre esquemas explícitos e implícitos es crucial para la estabilidad y eficiencia de la simulación. El concepto de "orden de error" nos da una métrica para saber qué tan buena es nuestra aproximación y cómo mejorarla.